**Лабораторна робота 8 Інтерполяційний багаточлен Ньютона**

**Завдання 1:** наближено відбудувати функцію , що задана таблицею, у довільній точці *х* за допомогою інтерполяційних багаточленів Ньютона.   
За наявним набором значень побудувати графік інтерполяційної функції.



Таблиця 1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | № варіанта | Значення аргумента *х* |
| 1.415  1.420  1.425  1.430  1.435  1.440  1.445  1.450  1.455  1.460  1.465 | 0.8885  0.8895  0.8906  0.8916  0.8926  0.8936  0.8947  0.8956  0.8966  0.8976  0.8986 | **1**  **11**  **21** | 1.416 1.456  1.431 1.462  1.422 1.451 |

Таблиця 2

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | № варіанта | Значення аргумента *х* |
| 0.101  0.106  0.111  0.116  0.121  0.126  0.131  0.136  0.141  0.146  0.151 | 1.2618  1.2764  1.2912  1.3061  1.3213  1.3366  1.3520  1.3677  1.3835  1.3995  1.4157 | **2**  **12**  **22** | 0.112 0.145  0.104 0.133  0.107 0.137 |

Таблиця 3

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | № варіанта | Значення аргумента *х* |
| 0.15  0.20  0.25  0.30  0.35  0.40  0.45  0.50  0.55  0.60  0.65 | 0.8607  0.8187  0.7788  0.7408  0.7046  0.6703  0.6376  0.6065  0.5769  0.5488  0.5220 | **3**  **13**  **23** | 0.151 0.505  0.223 0.554  0.252 0.457 |

Таблиця 4

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | № варіанта | Значення аргумента *х* |
| 0.180  0.185  0.190  0.195  0.200  0.205  0.210  0.215  0.220  0.225  0.230 | 5.5154  5.4669  5.3263  5.1930  5.0664  4.9461  4.8317  4.7226  4.6185  4.5191  4.4242 | **4**  **14**  **24** | 0.184 0.221  0.189 0.227  0.193 0.216 |

Таблиця 5

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | № варіанта | Значення аргумента *х* |
| 3.50  3.55  3.60  3.65  3.70  3.75  3.80  3.85  3.90  3.95  4.00 | 33.1154  34.8133  36.5982  38.4747  40.4473  42.5211  44.7012  46.9931  49.4024  51.9354  54.5982 | **5**  **15**  **25** | 3.522 3.905  3.643 4.005  3.675 3.852 |

Таблиця 6

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | № варіанта | Значення аргумента *х* |
| 0.115  0.120  0.125  0.130  0.135  0.140  0.145  0.150  0.155  0.160  0.165 | 8.6572  8.2932  7.9582  7.6489  7.3623  7.0961  6.8491  6.6185  6.3998  6.1965  6.0055 | **6**  **16** | 0.122 0.146  0.129 0.157 |

Таблиця 7

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | № варіанта | Значення аргумента *х* |
| 1.340  1.345  1.350  1.355  1.360  1.365  1.370  1.375  1.380  1.385  1.390 | 4.2556  4.3532  4.4552  4.5618  4.6734  4.7903  4.9130  5.0419  5.1774  5.3201  5.4706 | **7**  **17** | 1.361 1.394  1.346 1.381 |

Таблиця 8

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | № варіанта | Значення аргумента *х* |
| 0.01  0.06  0.11  0.16  0.21  0.26  0.31  0.36  0.41  0.46  0.51 | 0.9918  0.9519  0.9136  0.8769  0.8416  0.8077  0.7753  0.7441  0.7141  0.6854  0.6579 | **8**  **18** | 0.027 0.416  0.124 0.492 |

Таблиця 9

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | № варіанта | Значення аргумента *х* |
| 0.15  0.16  0.17  0.18  0.19  0.20  0.21  0.22  0.23  0.24  0.25 | 4.4817  4.9530  5.4739  6.0496  6.6859  7.3891  8.1662  9.0250  9.9742  11.0232  12.1825 | **9**  **19** | 0.159 0.234  0.173 0.242 |

Таблиця 10

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | № варіанта | Значення аргумента *х* |
| 0.45  0.46  0.47  0.48  0.49  0.50  0.51  0.52  0.53  0.54  0.55 | 20.1946  19.6133  18.9425  18.1746  17.3010  16.3123  15.1984  13.9484  12.5508  10.9937  9.2647 | **10**  **20** | 0.455 0.533  0.473 0.551 |

**ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ**

Нехай функція задана таблицею з постійним кроком.



|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
| ... | ... |
|  |  |

Різниці між значеннями функції у сусідніх вузлах інтерполяції називають ***кінцевими різницями першого порядку.***



,



....................

.



З кінцевих різниць І порядку отримують ***різниці другого порядку***:

,



,



...........................

.



Аналогічно отримують ***різниці k-го порядку:***

, .



Продовжуючи цей процес, можна за даною таблицею функції скласти таблицю кінцевих різниць.

Кінцеві різниці можуть бути представлені безпосередньо через значення функції:

,



,



,



.......................................................................

, .



**Перша інтерполяційна формула Ньютона**

Будемо шукати інтерполяційний багаточлен у вигляді:

(1)



Це багаточлен *n-*го степеню. Значення коефіцієнтів знайдемо з умови співпадіння значень вихідної функції та багаточлена у вузлах інтерполяції:



, . (2)



Покладаючи , знаходимо .



Для :



. Звідки .



Для



.



Звідки



.



Аналогічно знаходимо , , , …, .



Тобто, загальна формула для коефіцієнтів має вигляд:

,



Підставляючи знайдені вирази у формулу (1) для , отримуємо:



.(3)



Це – **перша інтерполяційна формула Ньютона.**

Проте, на практиці цю формулу використовують дещо в іншому вигляді. Для цього вводять змінну . Тоді



,



,



.............................

.



З урахуванням цих співвідношень, формула Ньютона (3) набуває вигляду:

(4)



Це – запис першої формули Ньютона через фазу інтерполяції.

Отриманий вираз може апроксимувати задану функцію на усьому відрізку зміни значення аргумента . Проте цю формулу доцільно використовувати для інтерполяції (екстраполяції) функції лише в околі початкового значення, де , тобто мале за абсолютною величиною. Для інших значень аргумента з першої половини відрізка інтерполяції, обчислюючи значення функції у фіксованій точці в якості слід обирати найближче зліва вузлове значення аргумента. Тому інша назва першої інтерполяційної формули Ньютона – **формула Ньютона для інтерполяції вперед.**



**Друга інтерполяційна формула Ньютона**

Побудуємо інтерполяційний багаточлен у вигляді:

(5)



Коефіцієнти обчислюємо, виходячи з тієї самої умови (2):



, .



Покладемо в (5). Тоді



.



Для визначення *а*1 покладемо :



.



Враховуючи, що , , , можемо записати:



.



Звідки

.



Вважаючи і замінюючи знайдені коефіцієнти їхніми значеннями, матимемо:



.



Аналогічні подальші обчислення дозволяють отримати вирази для інших коефіцієнтів:

, , …, .



Після підстановки в (5) знайдених значень коефіцієнтів формула матиме вигляд:



 (6)



Це - **друга інтерполяційна формула Ньютона**.

Цю формулу можна також записати через фазу інтерполяції.

Позначимо фазу як :



Тоді

;



;



………………………………..

.



З урахуванням цих співвідношень, друга інтерполяційна формула Ньютона (6) набуває вигляду:

(7)



Цю формулу використовують для значень аргумента у кінці таблиці, тобто для **інтерполяції назад**.

Підкреслимо: першу інтерполяційну формулу Ньютона застосовують для інтерполяції вперед і екстраполяції назад, а другу – для інтерполяції назад і екстраполяції вперед.

**ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ**

**Завдання 1:** наближено відбудувати функцію , що задана таблицею,



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1 |
|  | 1.2715 | 2.4652 | 3.6443 | 4.8095 | 5.9614 | 7.1005 |

у точках 0.1 та 0.9 за допомогою інтерполяційних багаточленів Ньютона.   
За наявним набором значень побудувати графік інтерполяційної функції.

*Розв’язання:* Складемо для заданої функції таблицю кінцевих різниць:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *і* |  |  |  |  |  |  |  |
| 0 | 0 | 1.2715 | 1.1937 | -0.0146 | 0.0007 | -0.0001 | 0.0000 |
| 1 | 0.2 | 2.4652 | 1.1791 | -0.0139 | 0.0006 | -0.0001 |  |
| 2 | 0.4 | 3.6443 | 1.1652 | -0.0133 | 0.0005 |  |  |
| 3 | 0.6 | 4.8095 | 1.1519 | -0.0128 |  |  |  |
| 4 | 0.8 | 5.9614 | 1.1391 |  |  |  |  |
| 5 | 1 | 7.1005 |  |  |  |  |  |

За умовою крок таблиці .



Для за початкове значення беремо .



Тоді .



Обчислення проводимо за першою інтерполяційною формулою Ньютона:



.



Отже



.



Для маємо: , .



Обчислення проводимо за другою інтерполяційною формулою Ньютона:



.



Отже



.



За наявним набором значень побудуємо графік інтерполяційної функції  на інтервалі (0; 1) (рис. 4):

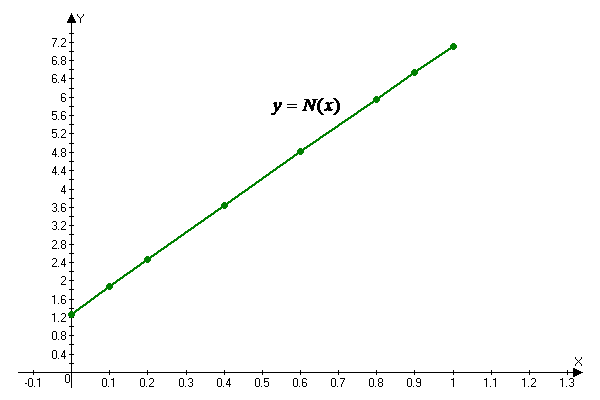


Рис. 4. Графік інтерполяційної функції 

*Відповідь*: 1.8702, 6.5325.



**Код**

import numpy as np

from math import factorial

x=[0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.]

y=[1.2715 ,2.4652, 3.6443, 4.8095, 5.9614, 7.1005]

h = x[1] - x[0]

x1=0.1

x2=0.9

q=(x1 - x[0])/h

q1 = (x2-x[-1])/h

def n(y,j): #обчислення кінцевих різниць

mas=[]

for i in range(len(y)):

mas.append(y[i] - y[i-1])

mas.pop(0)

if j == 1:

return mas

else:

j-=1

return n(mas, j)

#Перша інтерполяційна формула Ньютона

s\_1 = y[0]+q\*n(y,1)[0]+q\*(q-1)\*n(y,2)[0]/factorial(2)

s\_2 = q\*(q-1)\*(q-2)\*n(y,3)[0]/factorial(3)

s\_3 = q\*(q-1)\*(q-2)\*(q-3)\*n(y,4)[0]/factorial(4)

s\_4 = q\*(q-1)\*(q-2)\*(q-3)\*(q-4)\*n(y,5)[0]/factorial(5)

n\_1 = s\_1 + s\_2 + s\_3 + s\_4

print ('The value of a function at a point x1=', x1, 'using Newton\*s First Interpolation Formula', round(n\_1,5))

#Друга інтерполяційна формула Ньютона

#Додати код

print ('The value of a function at a point x1=', x1, 'using Newton\*s Second Interpolation Formula', round(n\_2,5))

Звіт містить

1. ПІП, варіант, група
2. Код+скрін з результатами
3. Графік